technische universität
dortmund

Einführung in die Programmierung

Wintersemester 2019/20
https://ls11-www.cs.tu-dortmund.de/teaching/ep1920vorlesung

Dr.-Ing. Horst Schirmeier
(mit Material von Prof. Dr. Günter Rudolph)

Arbeitsgruppe Eingebettete Systemsoftware (LS 12)
und Lehrstuhl für Algorithm Engineering (LS11)

Fakultät für Informatik

TU Dortmund

Inhalt

- Rekursion: Technik
- Rekursion vs. Iteration

Definition (einfache, erste Version)

Rekursives Programm := Programm, das sich selbst aufruft

Rekursive Funktion := Funktion, die sich selbst aufruft

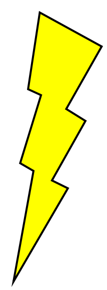
offensichtlich:

Es muss eine **Abbruchbedingung** geben …

gibt an, wann Programm / Funktion aufhören soll, sich selbst aufzurufen

$\Rightarrow$ sonst unendliche Rekursion

$\Rightarrow$ entspricht einer Endlosschleife



Arbeitsprinzip:

rekursiver Algorithmus löst Problem durch Lösung mehrerer **kleinerer Instanzen des gleichen Problems**

⇒ Zerlegung des Problems in kleinere Probleme gleicher Art

Rekursionsprinzip schon lange bekannt (> 2000 Jahre)

- zunächst in der Mathematik (z.B. Euklid)
- in der Informatik verwendet als fundamentale Technik beim Algorithmenentwurf
  - z.B. **„teile und herrsche“**-Methode (*divide and conquer*)
  - z.B. Backtracking

Thematik zu inhaltsschwer für eine 2-stündige Vorlesung → hier: nur erster Einstieg

Rekursion in der Mathematik

Beispiel: **Fakultät**

$f(0) = 1$	Rekursionsverankerung
$\forall n \in \mathbb{N}: f(n) = n * f(n-1)$	Rekursionsschritt

Beispiel: Rekursive Definition **logischer Ausdrücke**

1. Wenn **v** logische Variable (`true`, `false`), dann **v** und **NOT v** logischer Ausdruck.
2. Wenn **a** und **b** logische Ausdrücke, dann **a AND b** sowie **a OR b** logische Ausdrücke.
3. Alle logischen Ausdrücke werden mit 1. und 2. aufgebaut.

Rekursion in der Informatik

Beispiel: **Fakultät**

$f(0) = 1$ Rekursionsverankerung

$\forall n \in \mathbb{N}: f(n) = n * f(n - 1)$ Rekursionsschritt

```
unsigned long fak(unsigned int n) {
  if (n == 0) return 1;    // Rekursionsverankerung
  return n * fak(n - 1);   // Rekursionsschritt
}
```

$\Rightarrow$ **Rekursionsverankerung** verhindert endlose Rekursion

Rekursionsaufstieg

```
unsigned long x = fak(3);
```

3 * 2 = 6

```
return 3 * fak(2);
```

2 * 1 = 2

```
return 2 * fak(1);
```

1 * 1 = 1

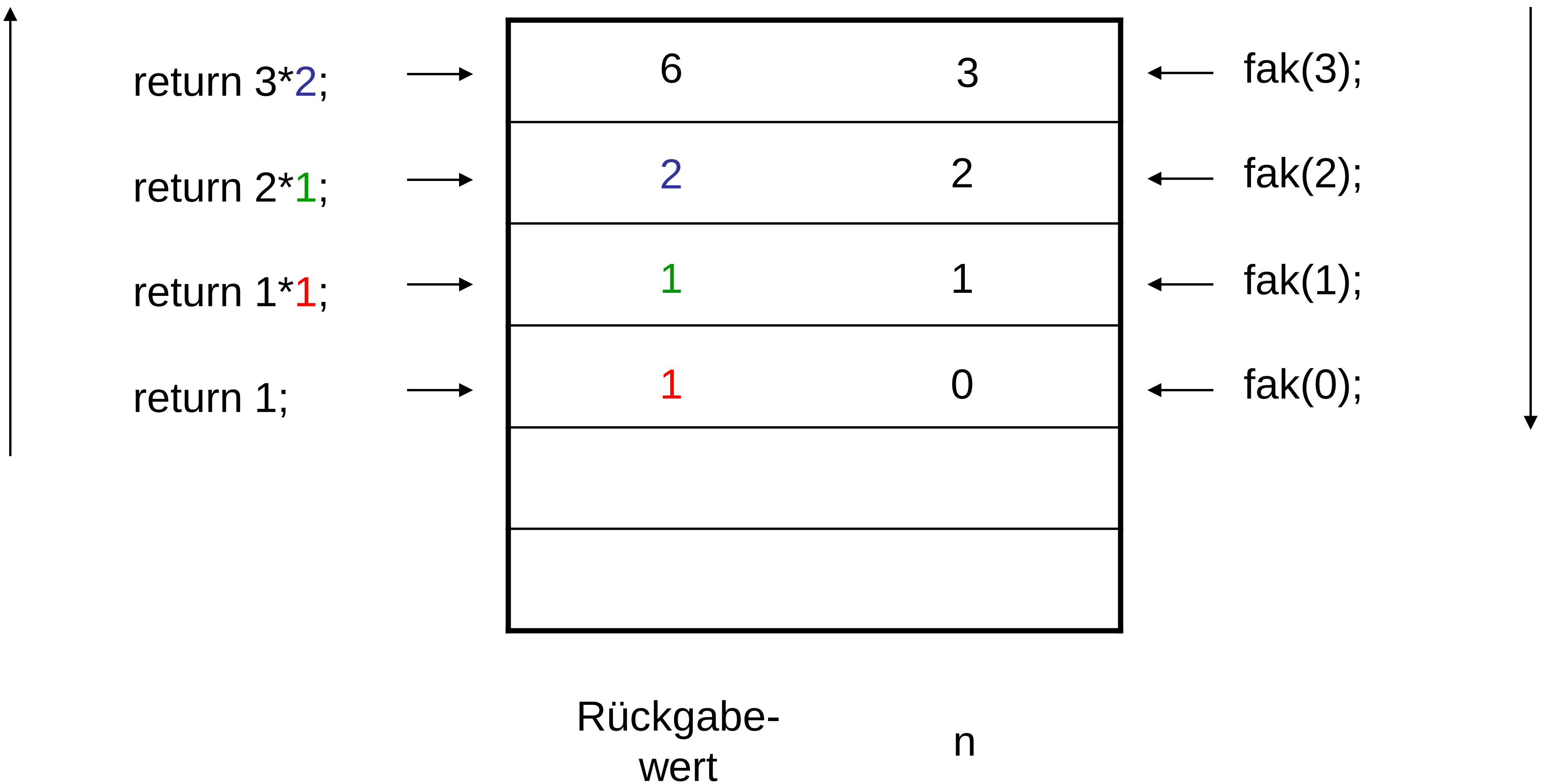
```
return 1 * fak(0);
```

1

```
return 1;
```

Rekursionsabstieg

Ablagefächer (Stack)



```
unsigned long fak(unsigned int n) {
  if (n == 0) return 1;   // Rekursionsverankerung
  return n * fak(n - 1);  // Rekursionsschritt
}
```

Beobachtung:

1. Der **Basisfall** des Problems muss **direkt lösbar sein** (Rekursionsverankerung).
2. Bei jedem rekursiven Aufruf müssen **kleinere Problemgrößen** übergeben werden.

Weiteres Beispiel:

Bestimme den **größten gemeinsamen Teiler** (ggT) zweier Zahlen

⇒ Euklidischer Algorithmus (> 2000 Jahre)

in C++:

```
unsigned int ggT(unsigned int a, unsigned int b) {
  if (b == 0) return a; // Rekursionsverankerung
  return ggT(b, a % b); // Rekursionsschritt
}
```

Verkleinerung des Problems

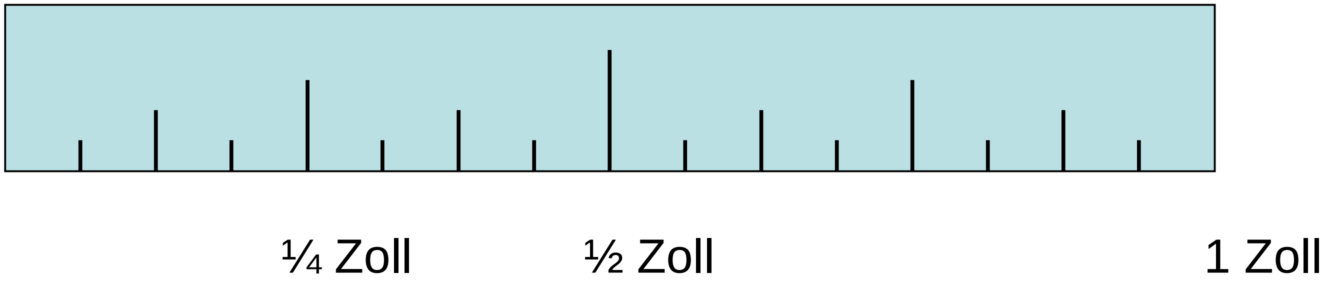
Ergebnis: **`16`**

ggT(123456, 131312)
ggT(131312, 123456)
ggT(123456, 7856)
ggT(7856, 5616)
ggT(5616, 2240)
ggT(2240, 1136)
ggT(1136, 1104)
ggT(1104, 32)
ggT(32, 16)
ggT(16, 0) → **`return 16`**

Abbruchbedingung!

Noch ein Beispiel:

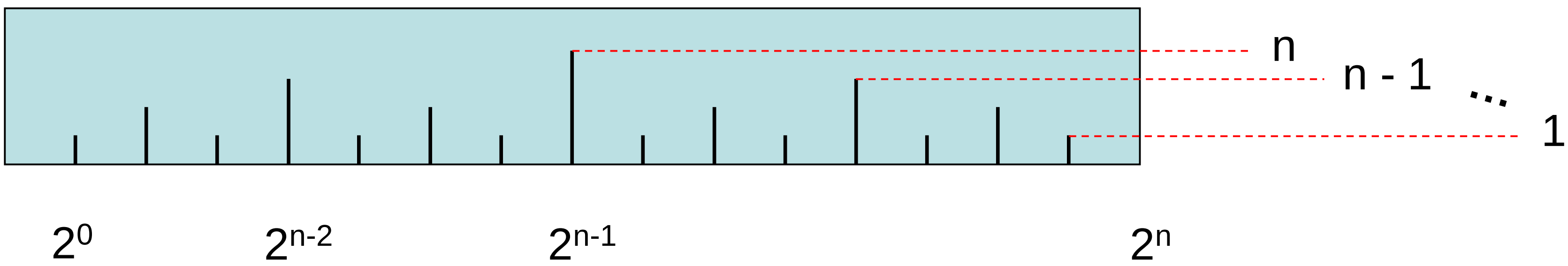
Zeichne Maßstriche auf ein (amerikanisches) Lineal



- Marke bei ½ Zoll
- kleinere Marke bei je ¼ Zoll
- noch kleinere Marke bei je 1/8 Zoll
- u.s.w. immer kleinere Marken bei je $1/2^n$

Annahme: Auflösung soll $1/2^n$ für gegebenes n sein

$\Rightarrow$ Maßstabsänderung:



Idee:

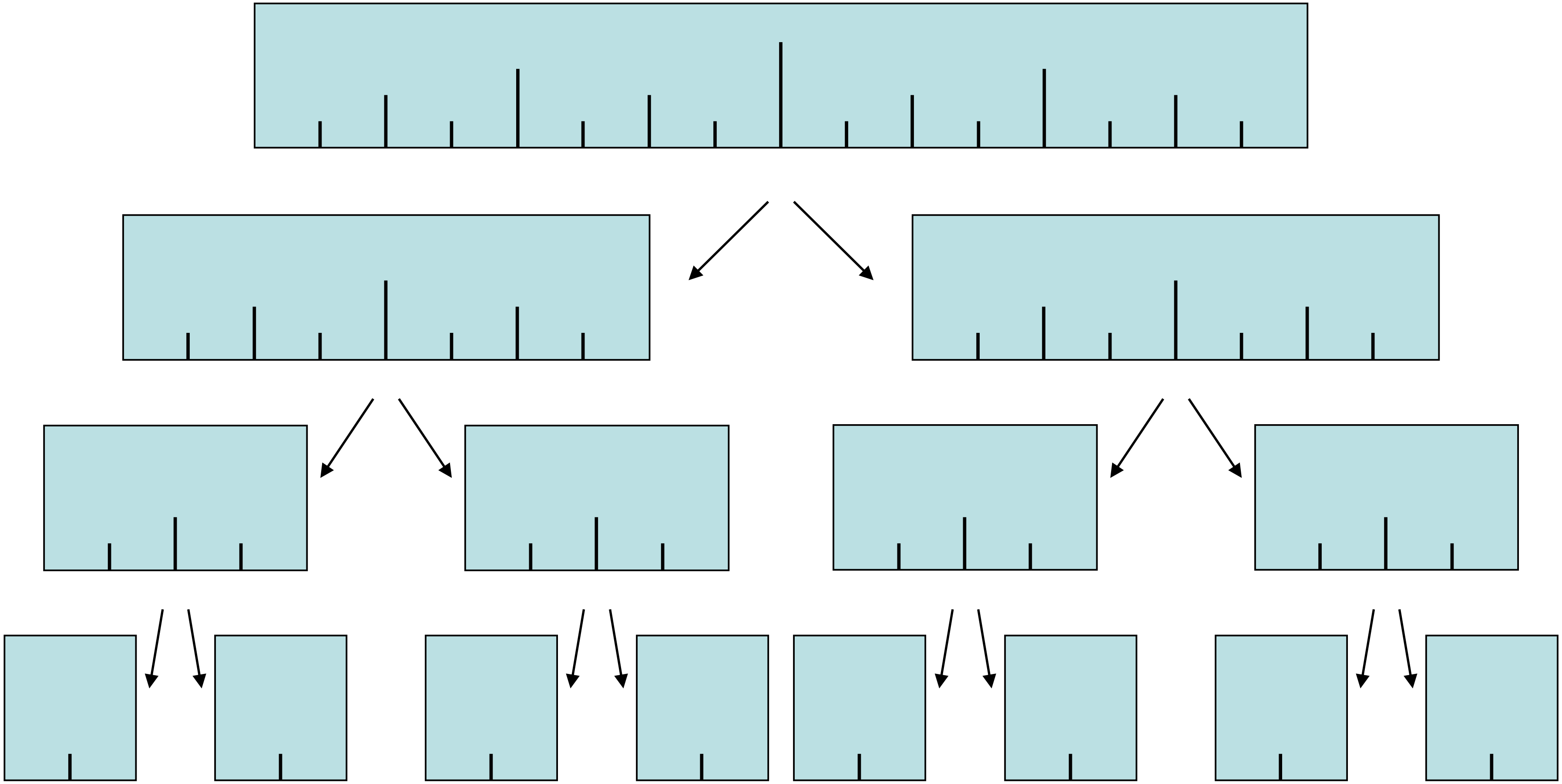
Teile Intervall in 2 gleich große Hälften,

zeichne linkes, halb so großes Lineal mit kürzerer Marke ← rekursiv!

erzeuge längere Marke in der Mitte

zeichne rechtes, halb so großes Lineal mit kürzerer Marke ← rekursiv!

Illustration:



Also:

Zeichnen des Lineals wird so lange auf kleinere Probleme / Lineale vereinfacht, bis wir das elementare Problem / Lineal lösen können:

„Zeichne eine Marke der Höhe 1“

Jetzt: Rekursionsaufstieg

linkes (elementares) Lineal zeichnen ☑

zeichne Marke der Höhe h (= 2) ☑

rechtes (elementares) Lineal zeichnen ☑

$\Rightarrow$ Teilproblem gelöst!

Implementierung

Welche Parameter spielen eine Rolle?

linker Rand des Teil-Lineals → **`li`**

rechter Rand des Teil-Lineals → **`re`**

Höhe der Marke → **`h`**

Mitte des Teil-Lineals (für die Marke) → **`mi`**

```
void lineal(unsigned int li,unsigned int re,unsigned int h) {
  unsigned int mi = (li + re) / 2;
  if (h > 0) {
    lineal(li, mi, h - 1);
    marke(mi, h);
    lineal(mi, re, h - 1);
  }
}
```

Implementierung

Zeichnen der Marken (mehrere Möglichkeiten)

hier: wir wissen, dass Marken von links nach rechts gezeichnet werden

⇒ Testausgabe mit senkrechtem Lineal (Marken von oben nach unten)

```
void marke(unsigned int position, unsigned int hoehe) {
  while (hoehe--) cout << '-';
  cout << endl;
}
```

Anmerkung:

`position` wird hier nicht gebraucht, aber andere Situationen vorstellbar

Implementierung

Hauptprogramm zum Testen:

```
#include <iostream>
using namespace std;

int main(int argc, char *argv[]) {
  if (argc != 2) {
    cerr << "usage: " << argv[0] << ": n" << endl;
    return 1;
  }
  unsigned int n = atoi(argv[1]);

  lineal(0, 1 << n, n);

  return 0;
}
```

<< im numerischen Ausdruck: **`x << n`**
schiebt Bitmuster von **`x`** um **`n`** Bits nach links.

Was bedeutet **`x >> n`** ?

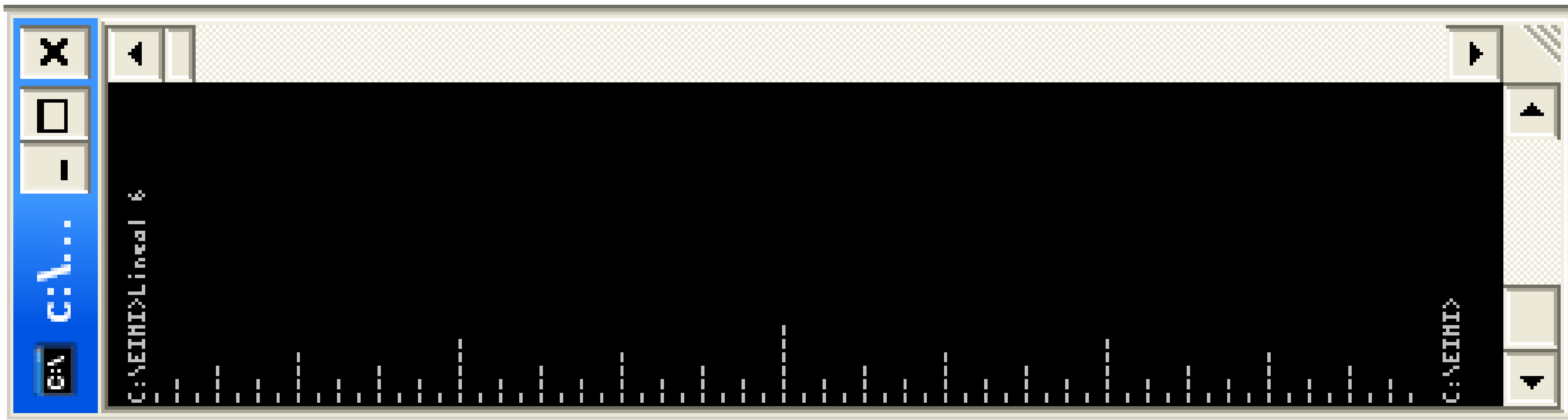
c:\windows\System32\cmd.exe

```
C:\EINI>Lineal 1
-

C:\EINI>Lineal 2
-
--
-

C:\EINI>Lineal 3
-
--
-
---
-
--
-

C:\EINI>Lineal 4
-
--
-
---
-
--
-
----
-
--
-
---
-
--
-

C:\EINI>_
```

c:\windows\System32\cmd.exe

```
C:\EINI>Lineal 5
-
--
-
---
-
--
-
----
-
--
-
---
-
--
-
-----
-
--
-
---
-
--
-
----
-
--
-
---
-
--
-

C:\EINI>
```

Lineal mit $2^6 = 64$ Marken:



Rekursion vs. Iteration

Theorem:

Jeder iterative Algorithmus lässt sich rekursiv formulieren und umgekehrt!

Wofür also das alles?

$\Rightarrow$ Manche Probleme lassen sich mit Rekursion sehr **elegant** und **einfach** lösen.

$\Rightarrow$ Lösung durch Iteration kann komplizierter sein!

Andererseits:

$\Rightarrow$ Nicht jedes Problem lässt sich durch Rekursion **effizient** lösen.

$\Rightarrow$ Iterative Lösung kann viel effizienter (auch einfacher) sein.

Rekursion vs. Iteration

beide einfach,
aber nicht gleich effizient

Iterative Lösung zur Fakultät:

```
unsigned long fak(unsigned int n) {
  unsigned int wert = 1;
  while (n > 0) wert *= n--;
  return wert;
}
```

1 Funktionsaufruf

1 Ablagefach

2 lokale Variable

Rekursive Lösung zur Fakultät:

```
unsigned long fak(unsigned int n) {
  if (n == 0) return 1;
  return n * fak(n - 1);
}
```

n Funktionsaufrufe

n Ablagefächer

n lokale Variable

Rekursion vs. Iteration

```
void lineal(unsigned int li,unsigned int re,unsigned int h) {
  for (int t = 1, j = 1; t <= h; j += j, t++)
    for (int i = 0; li + j + i <= re; i += j + j)
      marke(li + j + i, t);
}
```

Zeichnet erst alle Marken der Höhe 1, dann 2, usw. mit Auslassungen

```
void lineal(unsigned int li,unsigned int re,unsigned int h) {
  unsigned int mi = (li + re) / 2;
  if (h > 0) {
    lineal(li, mi, h - 1);
    marke(mi, h);
    lineal(mi, re, h - 1);
  }
}
```

Rekursion vs. Iteration

Zur einfachen **Übertragung** rekursiver Algorithmen in iterative äquivalente Form benötigen wir spezielle Datenstrukturen (**`stack`**).

Diese und einige andere werden in späterem Kapitel eingeführt.

⇒ **Elementare Datenstrukturen**

Intervallschachtelung

Bestimme Nullstelle einer streng monotonen Funktion f: $[a, b] \to \mathbb{R}$

Annahme: $f(a) \cdot f(b) < 0$, also haben f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen.

```
double nullstelle(double a, double b) {
  double const eps = 1.0e-10;
  double fa = f(a), fb = f(b);
  double c = (a + b) / 2., fc = f(c);
  if (fabs(fa - fb) < eps) return c;
  return (fa < 0 && fc < 0 || fa > 0 && fc > 0) ?
    nullstelle(c, b) : nullstelle(a, c);
}
```